**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**

**ПО МАТЕМАТИКЕ**

**МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП**

**11 класс**

**Решения задач.**

**11.1.** Способ 1.

Так как график функции пересекает ось ординат в точке с положительной ординатой, то $f(0) = b > 0$. Так как в окрестности точки $x = 0$ функция убывает, значит $f'(0) < 0$. Найдем $f'(x) = 2022x^{2021} - 2x + a$. Поэтому $f'(0) = a < 0$.

Способ 2.

Так как график функции пересекает ось ординат в точке с положительной ординатой, то $f(0) = b > 0$. Так как $f(1) < 0$, а $f(1) = 1 - 1 + a + b = a + b$, то $a + b < 0$. Значит, $a < -b$, а это означает, что $a < 0$.

Ответ: $a < 0$, $b > 0$.

**11.2.** Так как cos 1 < 1 и косинус в первой четверти убывает, то

$$\cos(\cos 1) > \cos 1.$$

Ответ: $\cos(\cos 1) > \cos 1$.

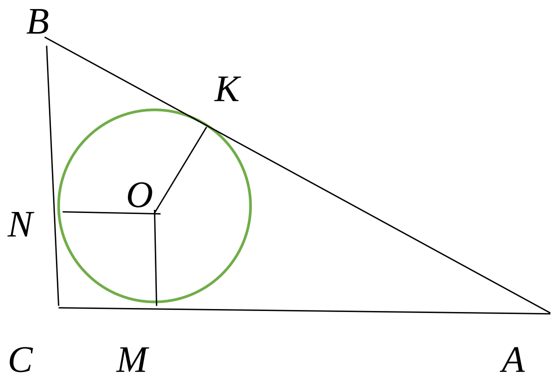
**11.3.** Умножим обе части неравенства на 2 и преобразуем его

следующим образом:

$$2a^2 + 2b^2 + 2ab + 2bc + 2ac < 0 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac) + a^2 + b^2 - c^2 < 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 + a^2 + b^2 - c^2 < 0$. Тогда $a^2 + b^2 - c^2 < -(a+b+c)^2 \le 0$. Отсюда $a^2 + b^2 - c^2 < 0$, а значит, $a^2 + b^2 < c^2$.

**11.4.** Пусть треугольник $ABC$ прямоугольный с прямым углом $C$. Тогда $OM = ON = OK = r$ – радиус вписанной в треугольник окружности. Так как $\Delta ABC$ - прямоугольный, то $AB$ – диаметр описанной около треугольника окружности и тогда $AB = 2R$. Площадь треугольника через радиус вписанной окружности и периметр находится по формуле $S_\Delta = pr$, где $p$ - полупериметр треугольника.




По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, имеем: $AC + BC = AB + 2r$. Тогда $S_{\Delta} = pr = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) \cdot r =$

$= \frac{1}{2}(2AB + 2r) \cdot r = \frac{1}{2}(4R + 2r) \cdot r = (2R + r) \cdot r$, что и требовалось доказать.

**11.5.** Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x$ – число нечетное: $x = 2k + 1$ ($k \in N$).

Найдем остаток от деления $2^x$ при делении на 3. Выполним следующие преобразования: $2^x = 2^{2k+1} = 2 \cdot 2^{2k} = 2 \cdot 4^k = 2((4^k - 1) + 1) = 2(4^k - 1) + 2.$ $4^k - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1)$ - представляет собой произведение двух последовательных нечетных чисел, поэтому делится на 3. Поэтому $2^x = 2(4^k - 1) + 2$ при делении на 3 имеет остаток 2. Таким образом $2^x = 3a + 2$, где $a \in N$. Заменим $2^x$ на $3a + 2$ в исходном уравнении, тогда получим:

$3a + 2 - 15 = y^2$. Преобразуем данное уравнение к виду: $3a = 12 + (y^2 + 1)$. Так как левая часть уравнения и первое слагаемое в правой части делятся на 3, то и $y^2 + 1$ делится на 3. Но так как квадраты натуральных чисел при делении на 3 дают остатки 0 или 1, то $y^2 + 1$ при делении на 3 дает остатки 1 или 2, поэтому на 3 не делится. Поэтому в первом случае исходное уравнение решений не имеет.

2) Пусть $x$ – число четное: $x = 2k$ ($k \in N$). Тогда получим: $2^{2k} - 15 = y^2$. Преобразуем данное уравнение: $2^{2k} - y^2 = 15 \Rightarrow (2^k - y)(2^k + y) = 15$. Так как $k$, $y$ – числа натуральные, то $\begin{cases} 2^k - y = 3, \\ 2^k + y = 5 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2^k - y = 1, \\ 2^k + y = 15 \end{cases}$. Решая данные две системы уравнений методом сложения, находим $k = 2$, $y = 1$ или $k = 3$, $y = 7$. Соответственно: $x = 4$, $y = 1$ или $x = 6$, $y = 7$.

Ответ: (4; 1), (6; 7).