ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
10 класс
Решения задач

10.1. Пусть v_1 и v_2 - скорость течения и собственная скорость лодки. Согласно условию, $v_2 > v_1$. Поскольку плот и лодка двигались навстречу друг другу с суммарной скоростью $v_1 + (v_2 - v_1)$ в течение 5 часов, то расстояние между пристанями равно АВ = $5 \cdot v_2$. Время перехода лодки из В в А и обратно равно $T = \frac{5v_2}{v_2 - v_1} + \frac{5v_2}{v_2 + v_1} = \frac{10v_2^2}{v_2^2 - v_1^2}$. По условию $T < 12$, то есть $10{v_2}^2 < 12\ (v_2^2 - v_1^2)$. Отсюда, ${v_2}^2 > 6\ {v_1}^2$; $v_2 > \sqrt{6}v_1$. Таким образом, в 7 часов вечера плот отплыл от А на расстояние $12v_1 < \frac{12v_2}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6} \cdot v_2 < 5v_2$ = АВ, то есть он не доплыл до В.

Ответ: выше по течению относительно В.

10.2. Арифметическая прогрессия имеет вид1; 1+d; … ; 1+nd, где $n \in Z$, $n \geq 14$. По условию: 1+nd = 1+p, где $p \in Z$. Отсюда вытекает, что $d = \frac{p}{n}$. По второму условию задачи $(1 + 7d) \cdot 15 = (1 + p - 3d) \cdot 7$. Отсюда $126d = 7p - 8$,

$126p = (7p - 8) \cdot n$

Так как в арифметической прогрессии целыми являются только крайние члены, то p и n – взаимно просты. Откуда получаем, что n является делителем числа 126, представимого в виде $126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$. Кроме того, $p \neq \pm 1$ и число $7p - 8$ кратно p, откуда p – четное. Тогда, n нечетно и $n \geq 14$, поэтому n = 21 или n = 63.

Второй случай не подходит, так как p оказывается нецелым, а первый дает p=8. Отсюда $d = \frac{8}{21}$.

Ответ: $\boldsymbol{d = \frac{8}{21}}$**.**

10.3. Координаты (x;y) центра описанной окружности определяются двойным равенством

$$\begin{cases}(x+1)^2 + (y-6)^2 = 25 \\ (x-7)^2 + (y-2)^2 = 25\end{cases}. \qquad \text{Откуда: } \begin{cases} y = 2x - 2 \\ x^2 - 6x + 8 = 0\end{cases}$$

Тогда $(x;y) \in \{(2;2);(4;6)\}$

Окружность радиуса 5 с центром в точке (4;6) ось абсцисс не пересекает. Поэтому абсцисса $x > 0$ третьей вершины удовлетворяют условию

$(x-2)^2 + 4 = 25$, откуда $x = 2 + \sqrt{21}$

Ответ: $(2+\sqrt{21};\ 0)$

10.4. Пусть r – радиус окружности. Заметим, что $\angle$HOD = $\angle$DOK,

$\angle$KOA = $\angle$AOM, а сумма этих четырех углов равна 180°.

Тогда $\angle$AOD = $\angle$KOA + $\angle$DOK = 90°

Аналогично проверяется, что $\angle$BOC = 90°, то есть треугольники AOD и BOC – прямоугольные. Отсюда, BC = $3\sqrt{10}$ и OC · OB = 2 S_{BOC} = BC · OL;

27 = 3r$\sqrt{10}$; r= $\frac{9}{\sqrt{10}}$.

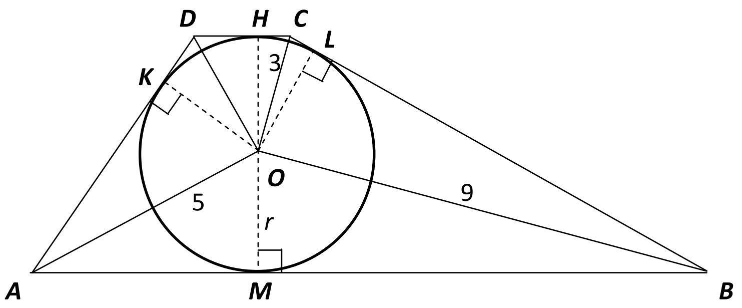
Кроме того, треугольники AOK и ADO подобны по двум углам, поэтому

$\frac{AD}{AO}=\frac{AO}{AK}$ **;** AD = $\frac{AO^2}{AK}=\frac{25}{\sqrt{25-r^2}}=\frac{25\sqrt{10}}{13}$**.**

Так как трапеция описана около окружности, получим с учетом условия описанности.

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}$ (AD + BC + AB + CD)· r = (AD + BC) ·r = $\sqrt{10}\ (3+\frac{25}{13})\cdot\frac{9}{\sqrt{10}}=\frac{576}{13}$

Ответ: $S_{ABCD}=\frac{576}{13}$



10.5. Заметим, что (b – a)(b + c)(c + a) + (c – b)(c + a)(a +b) + (a–c)(a+b)(b+c)= (c+a) ((b–a)(b+c) (c – b)(a+b)) + (a – c)(a + b)(b + c) = (c + a)(2bc – 2ab) + (a–c)(a+b)(b+c) = (c+a)+(c–a)2b + (a–c)(a+b)(b+c) = (c–a)(2bc+2ab – (a+b)(b+c)) = (c–a)(b–c)(a–b).

Откуда получаем $2\cdot\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right)+\frac{(c-a)(b-c)(a-b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=2\ (\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}.+\frac{c}{c+a})+\frac{(b-a)(b+c)(c+a)+(c-b)(c+a)(a+b)+(a-c)(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{2a}{a+b}+\frac{2b}{b+c}+\frac{2c}{c+a}+\frac{b-a}{b+a}+\frac{c-b}{b+c}+\frac{a-c}{a+c}$ =3

Следовательно, $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{3-\frac{1}{11}}{2}=\frac{16}{11}$

Ответ: $\frac{16}{11}$